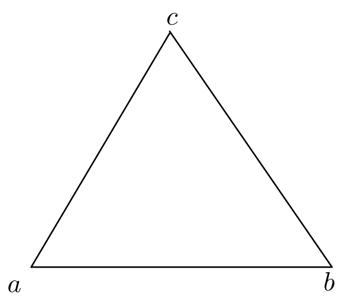
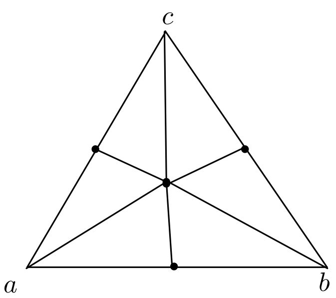
Subdivision of small categories

category の barcentric subdivision というものを考える。その model となるのは、

例えば、$C = \{a \longrightarrow b \longrightarrow c\}$ という category において、$BC \cong \Delta^2$ であるが、Δ^2 の重心細分というと、



BT



$BSd(T)$

という図を頭に描く。よって、$Sd(C)$ は object が 7 つある poset を model として考える。

Definition 0.0.1

$[n] = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\}$ という poset と考え、Δ は $[n]$ を object とし、order preserving map (functor) を morphism とした category とする。C を small category としたとき、Δ/C を、

$$\mathrm{ob}(\Delta/C) = \{\text{Nerve of } C\} = \{\text{functor} : [p] \longrightarrow C\}_{p \geqq 0} = \{X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q\}_{X_q \in \mathrm{ob}(C), q \geqq 0}$$

また、$X = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q$ と、$Y = Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_p$ に対し、

$$\mathrm{Hom}_{\Delta/C}(X, Y) = \{\xi : [q] \longrightarrow [p] \mid \text{order preserveing map}, Y\xi = X\}$$

と定義する。つまり、Y は X の morphism を合成、あるいは identity をはさんで構成される。X, Y を functor としてみれば、

$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[q]} \arrow[ur, "X"] \arrow[rr, "\xi"'] & & {[p]} \arrow[ul, "Y"'] \end{tikzcd}$$

の図式を可換にする ξ と考えてよい。$\xi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ は $\xi : [q] \longrightarrow [p]$ であるが、Δ/C の morphism であることを強調するときには、$\xi_* : X \longrightarrow Y$ とかくことにする。

Nerve を object とするというのが重心細分のアイデアである。しかし、identity がはさまれた degenerate な nerve を許すと、object は無限になってしまう。それでは、最初の model とはかけ離れたものになってしまうので、nondegenerate、つまり identity を含まないような nerve（ただし、indentity そのものは nondegenerate と考える）に制限すべきである。しかし、そうした object に限定した full subcategory を考えても、morphism において弊害が出てくる。そこで、morphsim はある同値関係で割った商集合とする。

Remmark 0.0.2

$\xi : [q] \longrightarrow [p]$: order preserving map というのは、i 番目を重複させる surjection $s_i : [n+1] \longrightarrow [n]$ と j 番目をスキップする injection $d_j : [m] \longrightarrow [m+1]$ のいくつかの合成で構成できる。つまり、

$$s_i(q) = \begin{cases} q & 0 \leqq q \leqq i \\ q-1 & i+1 \leqq q \leqq n+1 \end{cases}$$

そして、

$$d_j(q) = \begin{cases} q & 0 \leqq q \leqq j-1 \\ q+1 & j \leqq q \leqq m \end{cases}$$

で定義される。このとき、$s_i : [n+1] \longrightarrow [n]$ と $d_j : [n] \longrightarrow [n+1]$ に対し、$s_i \circ d_i = s_i \circ d_{i+1} = 1$ となる。また、$X = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q$ としたとき、

$$X \circ s_i = X_0 \cdots \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i \xrightarrow{=} X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow \cdots X_q$$

であり、

$$X \circ d_i = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} X_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q$$

である。ただし、$X \circ d_0$、$X \circ d_{q-1}$ は X_0, X_q の cut である。

このとき、$X = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q : [q] \longrightarrow C$ に対し、

$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[q]} \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "d_i, d_{i+1}"'] & {[q+1]} \arrow[u, "X \circ s_i"] \arrow[r, "s_i"'] & {[q]} \arrow[ul, "X"'] \end{tikzcd}$$

が可換となる。普通に考えて、$s_i \circ d_i = s_{i+1} \circ d_{i+1} = 1$ ということは、$d_i, d_{i+1} \in \mathrm{Hom}_{\Delta/C}(X, X \circ s_i)$ においては同じと見るべきである。

Definition 0.0.3

$X = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q, Y = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_p$ で、$\xi, \xi' \in \mathrm{Hom}_{\Delta/C}(X, Y)$ に対し、$\xi \sim \xi'$ を以下のように定義する。

$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[q]} \arrow[ur, "X"] \arrow[rr, "\xi, \xi'"'] & & {[p]} \arrow[ul, "Y"'] \end{tikzcd}$$

が可換であるが、ξ, ξ' を s_i, d_j の合成で分解したとき、

$$\begin{tikzcd} & & C & & \\ {[q]} \arrow[urr, "X"] \arrow[r, "\varphi"'] & {[n]} \arrow[ur, "Z"'] \arrow[rr, "d_i, d_{i+1}"'] & & {[n+1]} \arrow[ul, "Z \circ s_i"] \arrow[r, "\chi"'] & {[p]} \arrow[ull, "Y"'] \end{tikzcd}$$

の形で、$\xi = \chi \circ d_i \circ \varphi, \xi' = \chi \circ d_{i+1} \circ \varphi$ となるとき、$\xi \sim \xi$ とし、この関係を同値関係にまで拡張する。(注意としてそのままでは反射律、対称律、推移律のどれも満たさない。Hoyo の論文では d_i, d_{i+1} と具体的な index をつけずに、s_i の right inverce として扱っているので、対称律、推移律は満たす。)

$[\Delta/C]$ を object は Δ/C と同じで、$\mathrm{Hom}_{[\Delta/C]}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\Delta/C}(X,Y)/\sim$ とする。合成は functor の合成、$[\xi]\circ[\xi'] = [\xi\circ\xi']$ で定義するが、これが well defined なのは間に d_i, d_{i+1} を挟んでいたとしても、functor を合成してもやはり d_i, d_{i+1} を挟んでいるからである。

また、$[\Delta/C]$ の full subcategory で、object を nondegenerate な nerve に制限したものを、$Sd(C)$ と書き、C の重心細分された category と呼ぶ。

Lemma 0.0.4

$[\xi] \in \mathrm{Hom}_{Sd(C)}(X,Y)$ において、ξ は単射である。

proof)　　ξ を s_i, d_j の合成に分解する。$X = Y\circ\xi$ であり、X は Y の nerve を合成 $(X\circ d_j)$、あるいは identity を挟む $(X\circ s_i)$ ことにより構成されるが、今 X は identity を含まないので、ξ の中には s_i があるかもしれないが、結局いつかは挟まれた identity は合成により消えるはずなので、$Y\circ\xi$ というのは、Y の nerve を合成によりいくらかつぶしている。つまり、$\dim(X) = \dim(Y\circ\xi) \leqq \dim(Y)$ よって、ξ は d_j の合成で書けるため単射である。

□

Corollary 0.0.5

$[\xi] \in \mathrm{Hom}_{Sd(C)}(X,Y)$ において、$\dim(X) = \dim(Y) \Longleftrightarrow \xi : \mathrm{iso} \Longleftrightarrow \xi = 1$

Proposition 0.0.6

$Sd(C)$ は acyclic category である。

proof)　　Lemma 0.0.4 により、$Sd(C)$ の morphism は nerve の次元が低いほうから高いほうにしかない。また、Cor 0.0.5 により、$\mathrm{Hom}(X,X) = \{1\}$ である。

□

Theorem 0.0.7

C を acyclic category としたとき、$Sd(C)$ は poset である。

proof)　　$Sd(C)$ は acyclic なのだから、任意の $f, g \in \mathrm{Hom}_{Sd(C)}(X,Y)$ に対し、$f = g$ を示せばよい。今、$X = Y\circ f = Y\circ g$ であり、Lemma 0.0.4 より、$Y\circ f, Y\circ g$ というのは Y の nerve を合成でつぶすことに対応する。今、

$$Y = Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_p$$

と書けば、C が acyclic より、$i \neq j$ に対し、$Y_i \neq Y_j$ である。Y の nerve を合成でつぶした $Y\circ f = Y\circ g$ の形を見れば、何番目がつぶされたかが分かるので、f, g を d_j の合成で書いたとき、見かけは違っても simplicial condition で一致する。

□

Remmark 0.0.8

C が acyclic の条件をはずすと例えば、

$$Y = Y_1 \xrightarrow{a} Y_0 \xrightarrow{b} Y_1 \xrightarrow{c} Y_0 \xrightarrow{d} Y_1$$

で $bc = 1$ とでもすると、

$$Y \circ d_i d_j : Y_1 \xrightarrow{abc} Y_0 \xrightarrow{d} Y_1 \quad , \quad Y \circ d_{i'} d_{j'} : Y_1 \xrightarrow{a} Y_0 \xrightarrow{bcd} Y_1$$

でつぶし方は違うのに、$Y \circ d_i d_j = Y \circ d_{i'} d_{j'}$ となる。simplicil condition を用いても、$d_i d_j \neq d_{i'} d_{j'}$ である。ただし、$Sd(C)$ はさらに同値関係で割るわけだから、$d_i d_j \sim d_{i'} d_{j'}$ となる可能性はまだ残っている。

Corollary 0.0.9

任意の small category C に対し、$Sd^2(C)$ は poset である。

Example 0.0.10

$C = \{a \longrightarrow b \longrightarrow c\}$ に対し、$Sd(C)$ を計算してみる。$Sd(C)$ の object は C の nondegenrate な nerve なので、$\mathrm{ob}(Sd(C)) = \{a, b, c, ab, bc, ac, abc\}$ の 7 つの点である。一方 morphism は、単射な order preserving map を扱えばよいから、基本的には $d_0, d_1 : [0] \longrightarrow [1]$ と、$d_0, d_1, d_2 : [1] \longrightarrow [2]$ とその合成を考えればよい。まず 0-nerve から 1-nerve への morphism を考えると、

$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[0]} \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "d_0"'] & & {[1]} \arrow[ul, "ab"'] \end{tikzcd}$$

が可換であるので、$\mathrm{Hom}_{Sd(C)}(a, ab) = \{d_0\}$ という一点集合ということが分かる。d_1 は可換にしないのでこれしかなく、一点なので同値関係を考えなくても良い。同様に、

$$\mathrm{Hom}(a, ab) = \mathrm{Hom}(b, bc) = \mathrm{Hom}(a, ac) = \{d_0\}, \mathrm{Hom}(b, ab) = \mathrm{Hom}(c, bc) = \mathrm{Hom}(c, ac) = \{d_1\}$$

であることが分かる。次に、1-nerve から 2-nerve への morphism は、

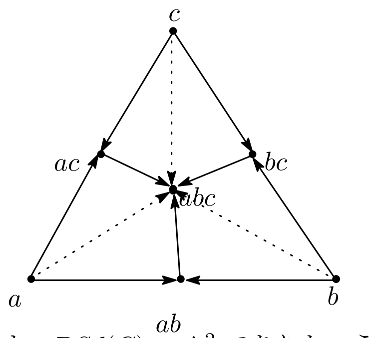
$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[1]} \arrow[ur, "ab"] \arrow[rr, "d_0"'] & & {[2]} \arrow[ul, "abc"'] \end{tikzcd}$$

が可換だから、$\mathrm{Hom}(ab, abc) = \{d_0\}, \mathrm{Hom}(bc, abc) = \{d_1\}, \mathrm{Hom}(ac, abc) = \{d_2\}$ である。最後に、0-nerve から 2-nerve への morphism である。

$$\begin{tikzcd} & C & \\ {[0]} \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "d_0 d_0 = d_0 d_2"'] & & {[2]} \arrow[ul, "abc"'] \end{tikzcd}$$

これは、simplicial condition からやはり、$\mathrm{Hom}(a, abc) = \{d_0 d_0 = d_2 d_0\}$ という一点集合と考えられる。同様に、$\mathrm{Hom}(b, abc) = \mathrm{Hom}(c, abc) = *$ である。$Sd(C)$ は poset であるので、下記のよう

に図示される。



これより、この分類空間はそのまま、$BSd(C) \cong \Delta^2$ でありちょうど、$BC \cong \Delta^2$ を細分した形になっている。

Example 0.0.11

$C = \{a \rightrightarrows b\}$ の category の $Sd(C)$ を考えてみると、$\mathrm{ob}(Sd(C)) = \{a, b, ab_1, ab_2\}$ の４点。そして、morphism は図式で描くと、

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & ab_2 \\ ab_1 & b \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

で、$B(Sd(C)) \cong S^1$ である。上記の図式は、

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & ab_1 \\ b \arrow[r] \arrow[ur] & ab_2 \end{tikzcd}$$

とも書ける。

Example 0.0.12

$C = \{a \leftrightarrows b\}$ という groupoid の $Sd(C)$ を考える。nondegenerate な nerve は無限に出てくる。

$$\mathrm{ob}(Sd(C)) = \{a, b, ab, ba, aba, bab, abab, baba, \cdots\}$$

morphism は

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & ab \arrow[r] \arrow[dr] & aba \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\ b \arrow[r] \arrow[ur] & ba \arrow[r] \arrow[ur] & bab \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots \end{tikzcd}$$

という形になり、やはりこれも poset で、n 列までで区切って、$Sd(C)^n$ を考えたとき、$BSd(C)^n \cong S^n$ である。よって、$BSd(C) \cong S^\infty$ である。

Small category C に対し、重心細分 $Sd(C)$ を考えたが、これが $Sd : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ という functor として考えたい。また、細分する前と後とで category としての性質は何が変わったのか。幾何学的に重心細分というと、形を余り変えないものを考えたい。

Lemma 0.0.13

$X, Y \in \mathrm{ob}([\Delta/C])$ に対し、$\dim X = q, \dim Y = p$ とし、$[\xi_*] \in \mathrm{Hom}_{[\Delta/C]}(X, Y)$ で、$\xi : [q] \longrightarrow [p]$ を order preserving surjection のとき、$[\xi_*]$ は isomorphism in $[\Delta/C]$ である。

proof) ξ は $s_i : [n+1] \longrightarrow [n]$ の合成として表せるので、各 $[(s_i)_*]$ が isomorphism in $[\Delta/C]$ を示せばよい。。$\xi = s_i : [n+1] \longrightarrow [n]$ と考える。このとき、$d_{i+1} : [n] \longrightarrow [n+1]$ を考えると、simplicial condition から、$s_i \circ d_{i+1} = 1_{[n]}$ である。よって、$(s_i)_* \circ (d_{i+1})_* = 1_Y$ でもある。そして、やはり simplicial condisition から、$s_i \circ s_{i+1} = s_i \circ s_i$、そして、$d_{i+1} \circ s_i = s_i \circ d_{i+2}$ であるため、$d_{i+1} \circ s_i : [n+1] \longrightarrow [n+1]$ を考えたとき、$(d_{i+1})_* \circ (s_i)_* = (s_i)_* \circ (d_{i+2})_* : X \longrightarrow X$ であるが、今、$X = Y \circ s_i$ であるので、$(s_i)_* \circ (d_{i+2})_* : X \longrightarrow X$ を詳しく見ると、$(d_{i+2})_* \sim (d_{i+1})_* : X \longrightarrow X \circ s_{i+1}$ であり、ここで、

$$X \circ s_{i+1} = Y \circ s_i \circ s_{i+1} = Y \circ s_i \circ s_i = X \circ s_i$$

をなることに注意すると、

$$(d_{i+1})_* \circ (s_i)_* = (s_i)_* \circ (d_{i+2})_* \sim (s_i)_* \circ (d_{i+1})_* = 1_X$$

となるため、$[(d_{i+1})_*]$ が $[(s_i)_*]$ の inverce である。

□

Lemma 0.0.14

$f : \Delta/C \longrightarrow D$ を functor とし、Δ/C の surjection を D の isomorphism に移すとする。このとき、f は natural functor $\Delta/C \longrightarrow [\Delta/C]$ を用いて、

$$\Delta/C \longrightarrow [\Delta/C] \longrightarrow D$$

と一意的に分解できる。

proof) 分解が存在すれば、natural functor $\Delta/C \longrightarrow [\Delta/C]$ は object、morphism 間の surjection であるため、その分解の仕方は一意的であることが分かる。では、具体的に分解を作る。functor $[\Delta/C] \longrightarrow D$ を、object 間は $X \mapsto f(X)$、そして hom 間は、$[\xi_*] \mapsto f(\xi_*)$ で定義する。これが functor ならば、natural functor との合成が f になることは明らかである。よって、morphism 対応が well defined であることを示せばよい。$\xi_* \sim \xi'_* : X \longrightarrow Y$ としたとき、

$$\xi_*, \xi'_* : X \longrightarrow Z \rightrightarrows^{d_i}_{d_{i+1}} Z \circ s_i \longrightarrow Y$$

という分解がある。つまり、$f(d_i)_* = f(d_{i+1})_* : f(Z) \longrightarrow f(Z \circ s_i)$ を示せばよい。$f(d_i)_*, f(d_{i+1})_*$ は $f(s_i)_*$ の right inverce であるが、今仮定より $f(s_i)_*$ は isomorphis であるから、$f(d_i)_* = f(d_{i+1})_*$ である。

□

Definition 0.0.15

$X = (f_1, \cdots, f_q)$ を C の nerve とし、合成可能な morphism の組で表すとする。$r(X) = (f_{i_1}, \cdots, f_{i_p})$ を $f_i = 1$ を除いた nondegenerate な nerve を表すとする。つまり、$r(X) \in \mathrm{ob}(Sd(C))$ である。こ

のとき、order preserving surjection $\alpha_X : [q] \longrightarrow [p]$ が、$f_i = 1$ ならば $\alpha(i-1) = \alpha(i)$ で定義することにより、$X = r(X) \circ \alpha_X$ を満たす。$\xi_* : X \longrightarrow Y$ in Δ/C に対し、$Sd(C)$ の morphism

$$r(\xi_*) = [(\alpha_Y)_*][\xi_*] \circ [(\alpha_X)_*]^{-1} : r(X) \longrightarrow r(Y)$$

と定義する。Lemma 0.0.5 を用いる。これは合成に関しても、$r(\xi_* \circ \xi'_*) = r(\xi_*) \circ r(\xi'_*)$ で、identity に関しても、$r(1) = 1$ を満たすため、$r : \Delta/C \longrightarrow Sd(C)$ という functor である。r は surjection を isomorphism（identity）に移すので、Lemma 0.0.14 により、

$$\Delta/C \longrightarrow [\Delta/C] \xrightarrow{r_C} Sd(C)$$

という r の分解が一意的に存在する。

Proposition 0.0.16

$i_C : Sd(C) \longrightarrow [\Delta/C]$ を inclusion functor としたとき、r_C, i_C は互いに inverce of equivalent

proof)　$r_C \circ i_C = 1$ であることは、定義より明らかである。逆に、$i_C \circ r_C : [\Delta/C] \longrightarrow [\Delta/C]$ を考える。natural transformetion $t : 1 \Longrightarrow i_C \circ r_C$ を以下のように定義する。$i_C \circ r_C(X) = r(X)$ であり、$t_X = [(\alpha_X)_*] : X \longrightarrow r(X)$ とする。このとき、$[\xi_*] : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{[\xi_*]}"] \arrow[d, "{[(\alpha_X)_*]}"'] & Y \arrow[d, "{[(\alpha_Y)_*]}"] \\ r(X) \arrow[r, "r(\xi_*)"'] & r(Y) \end{tikzcd}$$

が可換なのは、$r(\xi_*)$ の定義に戻ればよい。よって、t は natural であり、$Sd(C)$ と $[\Delta/C]$ はこれらの functor で equivalent である。

□

Definition 0.0.17

$f : C \longrightarrow D$ functor に対し、$Sd(f) : Sd(C) \longrightarrow Sd(D)$ を以下のように定義する。$f_* : \Delta/C \longrightarrow \Delta/D$ が、object 対応を f、morphism はそのままという対応で functor が誘導できる。morphism はそのままなのだから、f_* は surjection を surjection に移す。このため、Lemma 0.0.13 と 0.0.14 を用いると、

$$[f_*] : [\Delta/C] \longrightarrow [\Delta/D]$$

が誘導される。このとき、$[f_*]$ の制限で $Sd(C) \longrightarrow Sd(D)$ と定義するのが自然だが、残念ながら f は nontrivial な morphism を identity に移す可能性は十分にあるため、f_* の時点で nondegenerate nerve を保つとは限らない。よって、

$$Sd(f) = r_D \circ [f_*] \circ i_C : Sd(C) \longrightarrow Sd(D)$$

という functor の合成により定義する。$1 : C \longrightarrow C$ に対し、$[1_*] = 1 : [\Delta/C] \longrightarrow [\Delta/C]$ であるため、$Sd(1) = r_C \circ i_C = 1$ であった。次に合成に関してだが、$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ のとき、$Sd(gf) = Sd(g)Sd(f) : Sd(C) \longrightarrow Sd(E)$ を示したい。

$$Sd(gf) = r_E \circ [(gf)_*]i_C = r_E[g_*][f_*]i_C \cong r_E[g_*]i_D r_D[f_*]i_C = Sd(g)Sd(f)$$

ということで、$Sd(gf) \cong Sd(g)Sd(f) : Sd(C) \longrightarrow Sd(E)$ と natural isomorphic であることまでしか言えない。しかし、任意の $X \in \mathrm{ob}(Sd(C))$ に対し、

$$\alpha_X : Sd(gf)(X) \longrightarrow Sd(g)Sd(f)(X)$$

という natural isomorphism があるが、これは order preserving map の isomorphism ということで identity になる。よって、$Sd(gf)(X) = Sd(g)Sd(f)(X)$ である。さらに、natural から $\varphi : X \longrightarrow Y$ に対し、$Sd(gf)(\varphi) = Sd(g)Sd(f)(\varphi)$ であることもわかり、$Sd(gf) = Sd(g)Sd(f)$ であり、

$$Sd : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat}$$

は functor となる。

Remmark 0.0.18

Poset を poset からなる Cat の full subcategory としたとき、

$$Sd^2 : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Poset}$$

と考えられる。

では、category を細分する前と後では幾何学的な性質は変わらないことを示す。つまり、目標は $BC \simeq BSd(C)$ を示すことにある。

Definition 0.0.19

$e : \Delta/C \longrightarrow C$ を target 対応、つまり、object 対応は $e(X) = e(X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q) = X_q$ で対応させ、$\xi_* : X \longrightarrow Y$ in Δ/C に対し、$X = Y \circ \xi$ であるので、$X_q = (Y \circ \xi)_q = Y_{\xi(q)}$ となり、$e(\xi_*) : X_q \longrightarrow Y_p$ は $X_q = Y_{\xi(q)} \longrightarrow Y_p$ で、$Y_{\xi(q)}$ から Y_p までの composable morphism をすべて合成させた morphism を対応させる。これが functor になるのは簡単に確かめられる。

surjection $\xi_* : X \longrightarrow Y$ に対し、$\xi : [q] \longrightarrow [p]$ が surjection なのだから、$\xi(q) = p$ であり、$X = Y \circ \xi$ で $X_p = Y_{\xi(p)} = Y_p$ であるため、$e(\xi_*) = 1$ である。よって、Lemma **??**により、

$$e : \Delta/C \longrightarrow [\Delta/C] \xrightarrow{[e]} C$$

という分解ができる。functor

$$\varepsilon_C = [e] \circ i_C : Sd(C) \longrightarrow C$$

と定義する。

Proposition 0.0.20

$\varepsilon : Sd \Longrightarrow 1_{\mathrm{Cat}} : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ は natural transformation である。

proof)　　$f : C \longrightarrow D$ を functor としたとき、

$$\begin{tikzcd} Sd(C) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d, "Sd(f)"'] & {[\Delta/C]} \arrow[r, "{[e]}"] \arrow[d, "{[f_*]}"'] & C \arrow[d, "f"] \\ Sd(D) \arrow[r, "i_D"] & {[\Delta/D]} \arrow[r, "{[e]}"] & D \end{tikzcd}$$

という図式を考える。$e : \Delta/C \longrightarrow C$ は natural であるのは明らかなので、$[e]$ も natural になり、右の diagram は可換である。だが、左はそうではない。しかし、

$$[f_*] \circ i_C \cong i_D \circ (r_D \circ [f_*] \circ i_C) = i_D \circ Sd(f)$$

であるので、natural isomorphism $\alpha : [f_*] \circ i_C \Longrightarrow i_D \circ Sd(f)$ が存在する。任意の $X \in \mathrm{ob}(Sd(C))$ に対し、$\alpha_X : [f_*] \circ i_C(X) \longrightarrow i_D \circ Sd(f)(X)$ は surjection in $[\Delta/D]$ であって、$[e]$ は surjection を identity に移すため、

$$[e] \circ [f_*] \circ i_C(X) = [e] \circ i_D \circ Sd(f)(X)$$

となり、morphism も同様で、全体の diagram としては可換となるため、$f \circ \varepsilon_C = \varepsilon_D \circ Sd(f)$ である。

□

では、ε_C が weak equivalence であることを示す。$\varepsilon_C = [e] \circ i_C$ であって、Prop 0.0.16 から、i_C は category の equivalence であるから weak equivalence である。よって示すべきは、$[e]$ が weak equivalence であることである。この証明には Quillen の Theorem A [Qui73] を用いる。つまり、$[e]$ の fiber、left(right) fiber を調べてそれが contractible かどうかを見る。その前にいくつか Lemma を用意する。

Lemma 0.0.21

$i : A \longrightarrow B$ を fully faithfull inclusion としたとき、functor $r : B \longrightarrow A$ と natural transformation $1_B \Longrightarrow i \circ r$ が存在したなら、i は weak equivalence である。

proof)　　仮定から、$i \Longrightarrow i \circ r \circ i : A \longrightarrow B$ という natural transformation が存在する。i が fully faithfull inclusion という仮定から、新たに natural transformation、

$$1_A \Longrightarrow r \circ i : A \longrightarrow A$$

を作ることができる。よって、i は weak equivalence である。

Lemma 0.0.22

$f : C \longrightarrow D$ を functor で、任意の $d \in \mathrm{ob}(D)$ に対し、natural functor

$$i : f^{-1}(d) \longrightarrow f/d$$

は fully faithfull inclusion である。

proof)　　i の対応は、object 対応が $c \mapsto (c, 1_d)$、Hom 対応は $\varphi \mapsto \varphi$ である。これは object 対応が inclusion で、Hom 対応が全単射であることも見れば分かるため、fully faithfull inclusion である。

□

Lemma 0.0.23

$e:\Delta/C \longrightarrow C$ において、任意の $T \in C$ に対し、natural inclusion functor $i: e^{-1}(T) \longrightarrow e/T$ は weak equivalence である。

proof)　　fiber、left fiber の定義から、

$$\mathrm{ob}(e/T) = \{(X,\varphi) \in \mathrm{ob}(\Delta/C) \times Mor(C) \mid \varphi : e(X) \longrightarrow T\}$$

$$\mathrm{ob}(e^{-1}(T)) = \{X = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q \longrightarrow T\}$$

であった。$r: e/T \longrightarrow e^{-1}(T)$ を以下のように定義する。$(X,\varphi) \in \mathrm{ob}(e/T)$ について、

$$X = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q$$

としたとき、

$$r(X,\varphi) = X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q \xrightarrow{\varphi} T$$

とする。また、morphism においては、$\xi_* : (X,\varphi) \longrightarrow (Y,\chi)$ in e/T に対し、$\xi_* : X \longrightarrow Y$ in Δ/C であり、$\chi \circ e(\xi_*) = \varphi$ を満たすものである。

$$r(\xi_*) : r(X,\varphi) \longrightarrow r(Y,\chi)$$

は、

$$r(\xi_*) : (X_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_q \xrightarrow{\varphi} T) \longrightarrow (Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_p \xrightarrow{\chi} T)$$

を定義すればよい。つまり、$\xi' : [q+1] \longrightarrow [p+1]$ を与えればよい。これは、

$$\xi'(n) = \begin{cases} \xi(n) & 0 \leqq n \leqq q \\ p+1 & n = q+1 \end{cases}$$

このとき、$i \circ r : e/T \longrightarrow e/T$ を考える。$i \circ r(X,\varphi) = (r(X,\varphi), 1_T)$ であるが、

$$(d_q)_* : X \longrightarrow r(X,\varphi)$$

を考える。ただし、$d_q : [q] \longrightarrow [q+1]$ であり、$r(X,\varphi) \circ d_q = X$ である。これは、$1_T \circ e((d_q)_*) = \varphi$ を満たすので、$(d_p)_* : (X,\varphi) \longrightarrow (r(X,\varphi), 1_T)$ である。

$$\begin{tikzcd} (X,\varphi) \arrow[r, "(d_p)_*"] \arrow[d, "\xi_*"'] & i \circ r(X,\varphi) \arrow[d, "i\circ r(\xi_*)"] \\ (Y,\chi) \arrow[r, "(d_p)_*"'] & i \circ r(Y,\chi) \end{tikzcd}$$

が可換であることも確かめられるので、$(d_p)_*$ は natural であり、$1 \Longrightarrow i \circ r$ が作れるため、Lemma 0.0.22 により、i は weak equivalence である。

□

Lemma 0.0.24

$[e]:[\Delta/C]\longrightarrow C$ において、任意の $T\in C$ に対し、natural inclusion functor $i:[e]^{-1}(T)\longrightarrow [e]/T$ は weak equivalence である。

proof)　　$r:e/T\longrightarrow e^{-1}(T)$ から、$[r]:[e]/T\longrightarrow [e]^{-1}(T)$ が induce されればよい。$[r]$ の object 対応は r と同じ。Hom 対応において、$\xi_*,\xi'_*:(X,\varphi)\longrightarrow (Y,\chi)$ が、$\xi_*\sim\xi'_*$ in $[\Delta/C]$ のとき、$r(\xi_*)\sim r(\xi'_*)$ in $[\Delta/C]$ を示せばよい。$d_i,d_{i+1}:[q]\longrightarrow [q+1]$ において、$d'_i,d'_{i+1}:[q+1]\longrightarrow [q+2]$ を考える。

$$d'_i(n)=\begin{cases} d_i(n) & 0\leqq n\leqq q \\ q+2 & n=q+1 \end{cases}$$

であったから、$d'_i=d_i, d'_{i+1}=d_{i+1}:[q+1]\longrightarrow [q+2]$ となり、$(d'_i)_*\sim (d'_{i+1})_*$。よって、$r$ の定義を思い出すと、$r(\xi_*)\sim r(\xi'_*)$ のため、$[r]:[e]/T\longrightarrow [e]^{-1}(T)$ が誘導され、Lemma 0.0.23 と同じく示せる。

□

Theorem 0.0.25

$\varepsilon_C:Sd(C)\longrightarrow C$ は weak equivalence である。

proof)　　$[e]:[\Delta/C]\longrightarrow C$ が weak equivalence を示す。Quillen's Theorem A により、任意の $T\in \mathrm{ob}(C)$ に対し、$[e]/T$ が contractible であることを示せばよいが、Lemma 0.0.24 により、fiber $[e]^{-1}(T)$ が contractible であることを示せばよい。そのために、$[e]^{-1}(T)$ は inicial object を持つことを示す。0-nerve $T\in \mathrm{ob}([e]^{-1}(T))\subset \mathrm{ob}([\Delta/C])$ が inicial object である。任意の $[e]^{-1}(T)$ の nerve $X=X_0\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_q=T$ に対し、$[a_*]\in \mathrm{Hom}_{[\Delta/C]}(T,X)$ である。ただし、$a:[0]\longrightarrow [q]$ は $a(0)=q$ である。また、$[b_*]\in \mathrm{Ho}_{[e]^{-1}(T)}(T,X)$ を取ると、$b:[0]\longrightarrow [q]$ であるが、$h:[1]\longrightarrow [q]$ を $h(0)=b(0),h(1)=q$ で定義すれば、$a=hd_0,b=hd_1$ であり、

$$X:X_0\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_{b(0)-1}\longrightarrow X_{(b(0))}=T\longrightarrow X_{b(0)+1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_q=T$$

の形をしているのだから、$b(0)$ 以降の morphism を合成すると、$[b_*]\in \mathrm{Hom}_{[e]^{-1}(T)}(T,X)$ の定義から、$[e]([b_*])=1_T:X_{b(0)}=T\longrightarrow X_q=T$ であるので、$X\circ h=T\circ s_0$ となり、

$$a_*=h_*(d_0)_*, b_*=h_*(d_1)_*:T\rightrightarrows^{(d_0)_*}_{(d_1)_*} T\circ s_0=(T\xrightarrow{=}T)\xrightarrow{h_*}X$$

であるから、$a_*\sim b_*$ であり、$\mathrm{Hom}(T,X)=\{*\}$ となり、T が inicial object である。

□

Corollary 0.0.26

$f:C\longrightarrow D$ を functor としたとき、

$$\begin{tikzcd} Sd(C) \arrow[r, "Sd(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & Sd(D) \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

が可換なので、$Sd:\mathrm{Cat}\longrightarrow\mathrm{Cat}$ は weak equivalence を保つ。

Remmark 0.0.27

Thomason によれば、[Tho80] において Cat は上記の weak equivalence の指定により model structure を持つ。その cofibrant object はちょうど poset ということで、Sd^2 は cofibrant replacement に対応している。Hoyo は [Hoy07] の後半で poset、位相空間の homotopy category が equivalence であることを示している。

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Top}) \cong \mathrm{Ho}(\mathrm{sSet}) \cong \mathrm{Ho}(\mathrm{Cat}) \cong \mathrm{Ho}(\mathrm{Cat}_c) = \mathrm{Ho}(\mathrm{Poset})$$

参考文献

[Hoy07] M. Hoyo, *On the subdivision of small actegories*

[Seg68] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequence*

[Qui73] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*

[Tho80] R.Thomason, *Cat as a closed model category*